Naučno-stručnom veću za prirodno-matematičke nauke Univerziteta u Nišu
Izbornom veću Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu
Departmanu za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu

Odlukom Naučno-stručnog veća za prirodno-matematičke nauke Univerziteta u Nišu br. 8/17-01-001/20-005 od 17.1.2020. godine, imenovani smo za članove Komisije za pisanje izveštaja o prijavljenim kandidatima za izbor jednog nastavnika u zvanje vanredni profesor ili redovni profesor za užu naučnu oblast Matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. Posle detaljnog uvida u pristigli materijal, podnosimo sledeći

I Z V E Š T A J

Na raspisani konkurs javio se jedan kandidat, dr Nebojša Dinčić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu.

O kandidatu iznosimo sledeće podatke.

1 Biografski podaci

Nebojša Dinčić je rođen 21.3.1983. godine u Surdulici, gde je završio osnovnu i srednju školu kao nosilac Vukovih diploma. Osnovne studije je upisao školske 2001/02. godine na Odseku za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta u Nišu, smer Računarstvo i informatika. Diplomirao je septembra 2006. godine sa prosečnom ocenom 9,11 tokom studiranja. Diplomski rad *Uopšteni inverzi sa unapred definisanom slikom i jezgrom* odbranio je sa ocenom 10, pod mentorstvom prof. dr Dragana Đorđevića.

Doktorske studije na Departmanu za matematiku Prirodno–matematičkog fakulteta u Nišu upisao je školske 2006/07. godine. Za vreme doktorskih studija ostvario je prosečnu ocenu 9,67. Doktorsku disertaciju *Uopšteni inverzi proizvoda operatora* odbranio je juna 2011, pod mentorstvom prof. dr Dragana S. Đorđevića.

2 Profesionalna karijera

Nebojša Dinčić je u istraživačko zvanje istraživač-pripravnik izabran na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu 2007, istraživač-saradnik postaje

krajem 2009, da bi decembra 2010. bio izabran u zvanje asistenta na Odseku za matematiku i informatiku. U zvanje docenta za užu naučnu oblast Matematika izabran je 15. decembra 2011. godine, a u zvanje vanrednog profesora za užu naučnu oblast Matematika izabran je 22. maja 2015. godine.

2.1 Nastavni rad

2.1.1 Vežbe

Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu kandidat dr Nebojša Dinčić je uspešno izvodio vežbe iz sledećih predmeta:

1. Matematička analiza 1 (OAS, Departman za informatiku),
2. Matematička analiza 2 (OAS, Departman za informatiku),
3. Linearna algebra (OAS, Departman za matematkiku i OAS Departman za matematiku)
4. Osnovi Furijeove analize (MAS, Departman za matematiku),
5. Matematika 1 (OAS, Departman za fiziku),
6. Mere nekompaktnosti i primene (MAS, Departman za matematiku),
7. Integralne jednačine i specijalne funkcije (MAS, Departman za matematiku),
8. Neograničeni operatori matematičke fizike (MAS, Departman za matematiku).

2.1.2 Predavanja

Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu kandidat dr Nebojša Dinčić uspešno je predavao sledeće predmete:

1. Osnovi Furijeove analize (MAS, Departman za matematiku),
2. Matematika 1 (OAS, Departman za fiziku),
3. Teorija aproksimacija i kvadraturne formule (MAS, Departman za matematiku),
4. Neograničeni operatori matematičke fizike (MAS, Departman za matematiku, master),
5. Uopšteni inverzi i sistemi diferencijalnih jednačina (DAS, Departman za matematiku),
6. Nelinearne jednačine i sistemi (DAS, Departman za matematiku).

Kandidat dr Nebojša Dinčić je na listi nastavnika za Doktorsku školu matematike, modul Analiza.

3 Pregled naučnog i stručnog rada

3.1 Publikacije

3.1.1 Doktorska disertacija

Nebojša Č. Dinčić, *Uopšteni inverzi proizvoda operatora*, Prirodno--matematički fakultet, Niš, 2011.

Dr Nebojša Dinčić je do sada objavio **15 naučnih radova u časopisima sa impakt-faktorom**, i to: **8 radova u kategoriji M21** i **7 radova u kategoriji M22**. Takođe je autor jednog univerzitetskog udžbenika i jedne zbirke zadataka.

3.2 Radovi objavljeni u vrhunskim časopisima međunarodnog značaja-kategorije M21 (8 poena)

[1] Dragan S. Djordjević, **Nebojša Č. Dinčić**, *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 361 (1) (2010), 252–261.

[2] **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, *Identities concerning the reverse order law for the Moore-Penrose inverse*, Applied Mathematics and Computation, 220 (2013), 439–445.

[3] **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, *Basic reverse order law and its equivalencies*, Aequationes Mathematicae, 85 (3) (2013), 505-517.

[4] Dijana Mosić, **Nebojša Č. Dinčić**, *Reverse order law* $(ab)^\dagger = b^\dagger(a^\dagger abb^\dagger)^\dagger a^\dagger$ *in rings with involution*, Filomat, 28(9) (2014), 1791-1815

[5] Dragan S. Rakić, **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, *Group, Moore–Penrose, core and dual core inverse in rings with involution*, Linear Algebra and Its Applications, 463 (2014), 115-133

[6] Dragan Rakić, **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, *Core inverse and core partial order of Hilbert space operators*, Appl. Math. Comput., 244 (2014), 283-302

[7] **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, *Hartwig's triple reverse order law revisited*, Linear and Multilinear Algebra, 62 (7) (2014), 918-924

(radovi objavljeni posle izbora u zvanje vanredni profesor)

[8] **N. Č. Dinčić**, *Mixed-type reverse order law, ternary powers and functional calculus*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 114 (2020)

3.3 Radovi objavljeni u vodećim časopisima međunarodnog značaja-kategorije M22 (5 poena)

[9] **Nebojša Č. Dinčić**, *Matrix splittings and generalized inverses*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 74 (3-4) (2009), 233–247.

[10] **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, Dijana Mosić, *Mixed-type reverse order law and its equivalents*, Studia Mathematica, 204 (2) (2011), 123–136.

[11] **Nebojša Č. Dinčić**, Dragan S. Djordjević, *Mixed-type reverse order law for products of three operators*, Linear Algebra and its Applications, 435 (11) (2011), 2658–2673.

(radovi objavljeni posle izbora u zvanje vanredni profesor)

[12] **Nebojša Č. Dinčić**, *Extending the Moore-Penrose inverse*, Filomat, 30:2 (2016), 419-428

[13] Bogdan D. Djordjević, **Nebojša Č. Dinčić**, *Solving the operator equation $AX - XB = C$ with closed A and B*, Integr. Equ. Oper. Theory, 90:51 (2018)

[14] **Nebojša Č. Dinčić**, *Solving the Sylvester equation $AX - XB = C$ when $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$*, Electronic Journal of Linear Algebra, 35 (2019), 1-23

[15] Bogdan D. Djordjević, **Nebojša Č. Dinčić**, *Classification and approximation of solutions to Sylvester matrix equation*, Filomat 33:13 (2019), 4261-4280

3.4 Radovi u međunarodnim časopisima bez impakt-faktora

[16] **Nebojša Č. Dinčić**, *EP product of EP matrices. Solution 54-1.1*, IMAGE: The Bulletin of the International Linear Algebra Society 55 (2015), page 34

[17] **Nebojša Č. Dinčić**, *An identity involving the inverse of LCL^T. Solution 54-2.2*, IMAGE: The Bulletin of the International Linear Algebra Society 55 (2015), 35-36

3.5 Naučno-popularni radovi u domaćim časopisima

[18] **Nebojša Č. Dinčić**, *Neki primeri metrika*, Matematika i informatika 3 (3) (2016), 23-36

3.5.1 Univerzitetski udžbenici

1. **Nebojša Č. Dinčić**, *Osnovi Furijeove analize–zbirka rešenih zadataka*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2014.

   (udžbenici objavljeni posle izbora u zvanje vanredni profesor)

2. **Nebojša Č. Dinčić**, *Matematika 1 za studente fizike*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2020. (u štampi)

3.6 Učešće u naučnim projektima

Kandidat dr Nebojša Dinčić je u periodu 2007-2010. bio angažovan na projektu "Teorija operatora, stohastička analiza i primene" (broj 144003) Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, dok je od 2011. na projektu "Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene" (broj 174007), Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

3.7 Rukovođenje naučnim projektima

Kandidat dr Nebojša Dinčić je, kao "principal investigator" šestočlanog tima, konkurisao je sa projektom pod akronimom LOTA za PROMIS Fonda za nauku Republike Srbije (rezultati se očekuju).

3.8 Učešće na konferencijama

Kandidat dr Nebojša Dinčić saopštavao je svoje radove na osam konferencija.

1. **N. Č. Dinčić**, *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse (joint work with Dragan S. Djordjević)*, 12. Srpski matematički kongres, 28. avgust - 2. septembar 2008, Novi Sad

2. **N. Č. Dinčić**, *Some identities concerning the reverse order law for the Moore-Penrose inverse (joint work with Dragan S. Djordjević)*, Functional analysis and its applications, 16-18. jun 2009, Niš

3. **N. Č. Dinčić**, *Recent results on generalized inverses (joint work with Vladimir Rakočević, Dragan S. Djordjević, Dragana S. Cvetković–Ilić, Dejan Ilić and Dijana Mosić)*, Theoretical Computer Science - From Foundation to Application, 7-11. novembar 2009, Građevinski fakultet, Niš

4. **N. Č. Dinčić** *New results concerning multiple reverse-order law (joint work with Dragan S. Djordjević)*, 16th conference of International Linear Algebra Society, 21-25. june 2010, Pisa, Italy

5. **N. Č. Dinčić**, *Some results concerning the Moore-Penrose inverse of the Hilbert space operators (joint work with Dragan S. Djordjević)*, 2nd International Conference Contemporary Problems of Mathematics, Mechanics and Informatics, 17-19. jun 2012, Novi Pazar

6. **N. Č. Dinčić**, *Recent results on reverse order law (joint work with Dragan S. Djordjević)*, XIII Srpski matematički kongres, 22-25. maj 2014, Vrnjačka Banja

7. **N. Č. Dinčić**, *Recent results on generalized inverses (joint work with Dragan S. Djordjević)*, Analysis, Topology and Applications, 25-29. maj 2014, Vrnjačka Banja

8. **N. Č. Dinčić**, On the extended Moore-Penrose inverse, XI International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, August 24-27, 2015, Ohrid, Macedonia

3.9 Učešće na međunarodnim seminarima

1. Probabilistic models in mathematical biology and bioinformatics, DAAD, decembar 2004, Bitola, Makedonija

2. Symmetry in science and arts, DAAD, maj 2011, Vrnjačka Banja

3. Poseta Institutu za matematiku, fiziku i mehaniku u Ljubljani, Slovenija, oktobra 2014, u sklopu međudržavne saradnje

3.10 Indeks citiranosti radova

Naučni rezultati dr Nebojše Dinčića citirani su bar **138 puta (bez autocitata i kocitata!)**, uglavnom u radovima koji su objavljeni u međunarodnim časopsima sa impakt-faktorom.

3.10.1 Rad [1] citiran je bar 37 puta:

1. Y. Xue, Stable perturbations of operators and related topics, World Scientific, 2012. (monografija)
   https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8365

2. D. S. Cvetković–Ilić and R. Harte, Reverse order laws in C^*-algebras, Linear Algebra and its Applications 434 (5) (2011), 1388–1394. [M22] https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.11.022 (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379510005987)

3. C. Y. Deng, Reverse order law for group inverse, Journal of Mathematical Analysis and Applications 382 (2) (2011), 663–671. [M21] (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X11004264)

4. D. S. Cvetković-Ilić and V. Pavlović, A comment on some recent results concerning the reverse order law for $\{1,3,4\}-$inverses, Applied Math. Comput. 217 (1) (2010), 105-109 [M21] (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300310005321)

5. X. Liu, S. Wu, and D. S. Cvetković-Ilić, New results on reverse order law for $\{1,2,3\}$ and $\{1,2,4\}-$inverses of bounded operators, Mathematics of Computation, 82 (283), (2013), 1597–1607 [M21] DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2013-02660-9 (http://www.ams.org/journals/mcom/2013-82-283/ S0025-5718-2013-02660-9/home.html)

6. K. Sharifi and B. A. Bonakdar, The reverse order law for Moore-Penrose inverses of operators on Hilbert C^*-modules, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 42 (1) (2016), 53-60 [M23] (http://bims.iranjournals.ir/article_741_e95c4eb2557dba2d2bb48b970aa22608.pdf)

7. A. Korporal and G. Regensburger, On the product of projectors and generalized inverses, Linear and Multilinear Algebra 62(12) (2014), 1567–1582 [M22] (http://www.tandfonline.com/eprint/zifWzHa6yYjkEfrCt6mT/full#. VOmfOvnF9go)

8. Z. Xiong, The mixed-type reverse order laws for generalized inverses of the product of two matrices, Filomat 27:5 (2013), 937–947 [M21] (http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/publikacije/filomat/2013/27-5/F27-5-23.pdf)

9. M. Xue, H. Zhang and D. Li, Reverse Order Law for $\{1,3\}-$Inverse of a Two-Operator Product, Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 130, 6465–6474 (http://www.m-hikari.com/ams/ams-2013/ams-129-132-2013/ lidengfengAMS129-132-2013.pdf)

10. D. S. Cvetković-Ilić, H. Jin and X. Liu, The absorption laws for the generalized inverses, Appl. Math. Comp. 219(4) (2012), 2053–2059 [M21]
(http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312008429)

11. J. Wang, H. Zhang and G. Ji, A generalized reverse order law for the products of two operators, Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), Vol. 38, No. 4, 2010, 13-17

12. F. Du and Y. Xue, The reverse order law for Moore-Penrose inverse of closed operators, Chin. Quart. J. of Math. 28 (1), 2013, 139-146

13. D. Mosić, Reverse order law for the weighted Moore–Penrose inverse in C^*-algebras, Aequationes Mathematicae 85 (3) (2013), 465–470 [M23]
(http://link.springer.com/article/10.1007/s00010-012-0155-9)

14. H. Zekraoui, Z. Al-Zhour and C. Ozel, Some New Algebraic and Topological Properties of the Minkowski Inverse in the Minkowski Space, The Scientific World Journal, Volume 2013,
http://dx.doi.org/10.1155/2013/765732
(http://www.hindawi.com/journals/tswj/2013/765732/abs/)

15. X. Liu, M. Zhang and Y. Yu, Note on the Invariance Properties of Operator Products Involving Generalized Inverses, Abstract and Applied Analysis Vol. 2014 (2014), [M21] http://dx.doi.org/10.1155/2014/213458
(http://www.hindawi.com/journals/aaa/2014/213458/abs/)

16. D. S. Cvetković–Ilić, New conditions for the reverse order laws for $\{1,3\}$ and $\{1,4\}-$generalized inverses, Electronic Journal of Linear Algebra 23 (2012), 231–242 [M22]
(http://repository.uwyo.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1517&context=ela)

17. Z. Xiong and Y. Qin, A note on the reverse order law for least square g-inverses of operator product, Linear and Multilinear Algebra 64(7) (2016), pp. 1404-1414 [M21]
(http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2015.1087458)

18. Z. Xiong and Y. Qin, Triple reverse order law for Moore-Penrose inverse of operator product, J. Computational Analysis and Applications, 23(8) (2017), pp. 1347-1358
(http://www.eudoxuspress.com/images/JOCAAA-2017-VOL-23-ISSUE-8.pdf#page=23)

19. X. Wang, A. Yu, T. Li and C. Deng, Reverse order laws for the Drazin inverses, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 444 (1) (2016), 672-689 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X16302566)

20. S. Menkad, Partial isometries and norm equalities for operators, Matematički vesnik 67 (4) (2015), 269-276 (https://www.emis.de/journals/MV/154/mv15404.pdf)

21. H. Zekraoui, C. Ozel, The Invariance of the Reverse Order Law under Generalized Inverses of the Product of Two Closed Range Bounded Linear Operators on Hilbert Spaces and Characterization of the Property by the Norm Majorization, General Letters in Mathematics 1 (1) (2016), 32-38 (https://doi.org/DOI:10.31559/glm2016.1.1.4)

22. J. Farokhi-Ostad and A. Reza Janfada, Products of EP operators on Hilbert C^*-modules, Sahand Communications in Mathematical Analysis 10 (1) (2018), 61-71 (http://scma.maragheh.ac.ir/article_28402_1be457bb812e3fe49f49618ae3136280.pdf)

23. M. R. Jabbarzadeh, H. Emamalipour and M. Sohrabi Chegeni, Parallelism between Moore-Penrose inverse and Aluthge transform of operators, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 12(2) (2018), pp. 318-335, Doi:https://doi.org/10.2298/AADM161026005J

24. F. Gao and G. Hong, Moore-Penrose inverses of operators in Hilbert C^*-modules, International Journal of Mathematical Analysis 11 (8) 2017, 389-396, (http://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2017/ijma-5-8-2017/p/hongIJMA5-8-2017.pdf)

25. J. Chen, Y. Ke, D. Mosić, The reverse order law of the (b,c)-inverse in semigroups, Acta Mathematica Hungarica, 151 (1) (2017), 181-198 (https://link.springer.com/article/10.1007/s10474-016-0667-1)

26. L. Wang, S. S. Zhang, X. X. Zhang and J. L. Chen, Mixed-type reverse order law for Moore-Penrose inverse of products of three elements in rings with involution, Filomat 28:10 (2014), 1997-2008 (http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/0354-5180/2014/0354-51801410997W.pdf)

27. N. Thome, A simultaneous canonical form of a pair of matrices and applications involving the weighted Moore-Penrose inverse, Applied Mathematics Letters, vol. 53, issue, 2016, 112 – 118 (https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/84990/THOME_revised.pdf?sequence=2)

28. M. Mohammadzadeh and M. Hassani, The solutions to some operator equations in Hilbert C^*-module, Journal of Linear and Topological Algebra 4 (1) (2015), 35-42 (http://jlta.iauctb.ac.ir/article_513813_951b3470a1795ef1334304ce53162f13.pdf)

29. H. Zhang, Y. Sun and W. Yu, A new result on reverse order laws for $\{1,2,3\}-$inverse of a two-operator product, J. Math. Comput. Sci 7 (6) (2017), 1006-1021 (http://scik.org/index.php/jmcs/article/view/3483)

30. M. Sohrabi Chegeni, N. Abbasi and H. Emamalipour, Fuglede-Putnam type theorems via the Moore-Penrose inverse and Aluthge transform, Journal of Mathematical Extension 11 (1) (2017), 33-46 (http://www.ijmex.com/index.php/ijmex/article/viewFile/499/300)

31. Z. Xiong and Z. Liu, Applications of completions of operator matrices to some properties of operator products on Hilbert spaces, Complex Analysis and Operator Theory 12 (1) (2018), 123-140

32. B. Liao and Y. Zhang, Different complex ZFs leading to different complex ZNN models for time-varying complex generalized inverse matrices, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 25(9) (2014),6584795, pp. 1621-1631

33. M. R. Jabbarzadeh and M. Sohrabi Chegeni, Moore–Penrose inverse of conditional type operators, Operators and Matrices 11(1) (2017),11-19, pp. 289-299

34. B. Kramer and A. A. Gorodetsky, System identification via CUR-factored Hankel approximation, SIAM Journal on Scientific Computing 40(2) (2018), pp. A848-A866

35. A. Lay-Ekuakille, L. Fabbiano, G. Vacca, J. K. Kitoko, P. B. Kulapa and V. Telesca, A comparison between the decimated Padé approximant and decimated signal diagonalization methods for leak detection in pipelines equipped with pressure sensors, Sensors (Switzerland),

18(6) (2018),1810
doi:10.3390/s18061810

36. X. Yin, C. Wang, J. Wang, (...), X. Wang, W. Li, Control technology for five degree of freedom load recurrence of wind turbines, Taiyangneng Xuebao/Acta Energiae Solaris Sinica 39(12) (2018), pp. 3568-3576

37. R. Liu, H. Zhang, C. Deng, On the Mixed-Type Generalized Inverses of the Products of Two Operators, Filomat 33:14 (2019), 4361–4376 https://doi.org/10.2298/FIL1914361L

3.10.2 Rad [11] citiran je bar jednom:

38. L. Wang, S. S. Zhang, X. X. Zhang and J. L. Chen, Mixed-type reverse order law for Moore-Penrose inverse of products of three elements in ring with involution, Filomat 28:10 (2014), 1997-2008 (http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/publikacije/filomat/2014/28-10/F28-10-3.pdf)

3.10.3 Rad [10] citiran je bar jednom:

39. M. S. Moslehian, K. Sharifi, M. Forough and M. Chakoshi, Moore-Penrose inverse of Gram operator on Hilbert C^*-modules, Studia Mathematica 210 (2) (2012), 189-196 (https://eudml.org/doc/285532)

3.10.4 Rad [2] citiran je bar jednom:

40. N. Castro-Gonzalez and R. E. Hartwig, Perturbation results and the forward order law for the Moore-Penrose inverse of a product, Electronic Journal of Linear Algebra 34 (2018), 514-525

3.10.5 Rad [3] citiran je bar 4 puta:

41. A. Korporal and G. Regensburger, On the product of projectors and generalized inverses, Linear and Multilinear Algebra 62 (12) (2014), 1567-1582 (M21) (https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03081087.2013.839672)

42. X. Liu, M. Zhang and J. Benitez, Further results on the reverse order law for the group inverse in rings, Applied Mathematics and Computation 229 (2014), 316-326 (M21)
(https://ezproxy.nb.rs:2055/science/article/pii/S0096300313013064)

43. Y. Tian, Equalities and inequalities for ranks of products of generalized inverses of two matrices and their applications, Journal of Inequalities and Applications (2016) 2016:182
DOI 10.1186/s13660-016-1123-z
(https://journalofinequalitiesandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/s13660-016-1123-z#Bib1)

44. G. Ciecierska, Determinant systems method for computing reflexive generalized inverses of products of Fredholm operators, Mathematica Aeterna 6 (6) (2016), 895-906
(http://c-hilaris.com/MA/2016/MA6_6_8.pdf)

3.10.6 Rad [4] citiran je bar 2 puta:

45. H. Zou, J. Chen and P. Patricio, Reverse order law for the core inverse on rings, Mediterranean Journal of Mathematics (2018), 15:45
(https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-018-1189-6)

46. Y. Chen and H. Zou, Reverse Order Laws for Hirano Inverses in Rings, Filomat 33:11 (2019), 3487–3496
https://doi.org/10.2298/FIL1911487C

3.10.7 Rad [5] citiran je bar 65 puta:

47. H. Zhu, P. Patricio, J. Chen and Y. Zhang - The inverse along a product and its applications, Linear and Multilinear Algebra 64(5) (2016), pp. 834-841

48. G. Luo, K. Zuo and L. Zhou - Revisitation of the core inverse, Wuhan University Journal of Natural Sciences 20 (5) (2015), 381-385
(https://link.springer.com/article/10.1007/s11859-015-1109-6)

49. S. Xu, J. Chen and X. Zhang - New characterizations for core inverses in rings with involution, Frontiers of Mathematics in China 12(1) (2017), pp. 231-246

50. J. Chen, P. Patricio, Y. Zhang and H. Zhu, Characterizations and representations of core and dual core inverses, Canadian Mathematical

Bulletin 60(2) (2017), pp. 269-282
http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2016-045-7

51. Y. Ke, Y. Gao and J. Chen – Representations of the $(b, c)-$inverses in rings with involution, Filomat 31:9 (2017), 2867-2875

52. J. Benitez, E. Boasso and H. Jin, On one-sided (b,c)-inverses of arbitrary matrices, Electronic Journal of Linear Algebra 32 (2017), 391-422

53. L. Wang and J. Chen, Further results on partial ordering and the generalized inverses, Linear and Multilinear Algebra 63 (12) (2015), 2419-2429 (M21)

54. Y. Gao and J. Chen, Pseudo core inverses in rings with involution, Communications in Algebra, 46(1) (2018), pp. 38-50

55. T. Li and J. Chen, Characterizations of core and dual core inverses in rings with involution, Linear and Multilinear Algebra 66(4) (2018), pp. 717-730 (M21)

56. H. Zou, J. Chen, T. Li and Y. Gao, Characterizations and representations of the inverse along an element, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2016, 1-23
(https://doi.org/10.1007/s40840-016-0430-3)

57. Y. Gao and J. Chen, Characterizations of *-DMP matrices over rings, Turkish Journal of Mathematics, 42 (2018), 786-796
(http://journals.tubitak.gov.tr/math/issues/mat-18-42-3/mat-42-3-5-1702-109.pdf)

58. Z. Ke, L. Wang and J. Chen, The core inverse of a product and 2x2 matrices, Bulletin of the Malaysian Mathematical Science Society 2017, 1-16
(https://link.springer.com/article/10.1007/s40840-017-0464-1)

59. J. Chen, H. Zou, H. Zhu and P. Patricio, The one-sided inverse along an element in semigroups and rings, Mediterranean Journal of Mathematics (2017), 14:208
(https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-017-1017-4)

60. Y. Gao and J. Chen, The pseudo core inverse of a lower triangular matrix, Revista de la Real Academia de Ciencia Exactas, Fisicas y Naturales, Serie A. Matematicas 2017 (M21)
(https://link.springer.com/article/10.1007/s13398-017-0486-4)

61. S. Xu and J. Benitez, Existence criteria and expressions of the $(b,c)-$inverse in rings and their applications, Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15(1) 14 (https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-017-1056-x)

62. H. Ma, Optimal perturbation bounds for the core inverse, Applied Mathematics and Computation 336 (2018), 176-181 (M21a) (https://ezproxy.nb.rs:2055/science/article/pii/S0096300318303850)

63. H. Zou, J. Chen and P. Patricio, Reverse order law for the core inverse in rings, Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15(3) 145 (https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-018-1189-6)

64. M. Zhou and J. Chen, Integral representations of two generalized core inverses, Applied Mathematics and Computation 333 (2018), 187-193 (M21a) (https://ezproxy.nb.rs:2055/science/article/pii/S0096300318302662)

65. D. Mosić, One-sided core partial orders on a ring with involution, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas 112(4) (2018), pp. 1367-1379 (M21) (https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs13398-017-0433-4)

66. J. Marovt, On partial orders on proper $*-$rings, Revista de la Union Matematica Argentina 59 (1) (2018), 193-204 (http://www.inmabb.criba.edu.ar/revuma/pdf/v59n1/v59n1a10.pdf)

67. T. Li and J. Chen, The core and dual core inverse of a morphism with factorisation, Journal of Algebra and Its Applications, 2018. (https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219498819500981)

68. H. Wang and X. Liu, Partial orders based on core-nilpotent decomposition, Linear Algebra and its Applications 488 (2016), 235-248 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437951500573X)

69. H. Jin and J. Benitez, The absorption laws for the generalized inverses in rings, Electronic Journal of Linear Algebra 30 (2015), 827-842 (https://doi.org/10.13001/1081-3810.3092)

70. Y. Ke, D. S. Cvetković-Ilić, J. Chen, J. Višnjić, New results on $(b,c)-$inverses, Linear and Multilinear Algebra 66 (3) (2018), 447-458 (https://www.tandfonline.com/doi/ref/10.1080/03081087.2017.1301362?scroll=top)

71. G. Wang, Y. Wei and S. Qiao, Generalized inverses: theory and computations, Springer, 2018. (monografija, ISBN 978-981-13-0146-9)

72. X. Zhang, S. Xu, and J. Chen, Core partial order in rings with involution, Filomat, 31(18) (2017), pp. 5695-5701

73. Z. Ma, J. Chen and R. Han, Characterizations of EP, normal and Hermitian elements in rings using generalized inverses, Journal of Southeast University (English Edition) 33(2) (2017), pp. 249-252

74. M. Zhou, J. Chen, T. Li and D. Wang, Three limit representations of the Core-EP Inverse, Filomat, 32(17) (2018), pp. 5887-5894

75. T. Li and J. Chen, The core invertibility of a companion matrix and a Hankel matrix, Linear and Multilinear Algebra, 2018

76. O. M. Baksalary, D. Trenkler and G. Trenkler, On most perfect magic squares of order four, Linear and Multilinear Algebra, 2018. (M21)

77. D. Mosić, C. Deng and H. Ma, On a weighted core inverse in a ring with involution, Communications in Algebra 46(6) (2018), pp. 2332-2345

78. H. Zou, J. Chen and P. Patrício, Characterizations of $m-EP$ elements in rings, Linear and Multilinear Algebra 66(6) (2018), pp. 1244-1256 (M21)

79. H. Zhu, Several characterizations for generalized inverses in a ring, Linear and Multilinear Algebra 66(7) (2018), pp. 1351-1361 (M21)

80. H. Zhu. Further results on several types of generalized inverses, Communications in Algebra 46(8) (2018), pp. 3388-3396

81. S. Xu, J. Chen and J. Benítez, Projections for generalized inverses, Linear and Multilinear Algebra 66(8) (2018), pp. 1593-1605 (M21)

82. Y. Gao, J. Chen, P. Patrício and D. Wang, The pseudo core inverse of a companion matrix, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 55(3) (2018), 407-420

83. M. Zhou and J. Chen, Integral representations of two generalized core inverses, Applied Mathematics and Computation 333 (2018), pp. 187-193 (M21a)

84. H. Zou, J. Chen, T. Li and Y. Gao, Characterizations and Representations of the Inverse Along an Element, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 41(4) (2018), pp. 1835-1857

85. M. Zhou, J. Chen, P. S. Stanimirović, V. N. Katsikis and H. Ma, Complex Varying-Parameter Zhang Neural Networks for Computing Core and Core-EP Inverse, Neural Processing Letters, 2019

86. I. I. Kyrchei, Determinantal Representations of the Core Inverse and Its Generalizations with Applications, Journal of Mathematics, 2019, 1631979

87. D. Mosić and P. S. Stanimirović, Composite outer inverses for rectangular matrices, Quaestiones Mathematicae, 2019

88. M. Ćirić, J. Ignjatović, The existence of generalized inverses of fuzzy matrices, Studies in Computational Intelligence 794, pp. 19-38 2019

89. M. Zhou, J. Chen and D. Wang, The core inverses of linear combinations of two core invertible matrices, Linear and Multilinear Algebra 2019 (M21)

90. M. Zhou, J. Chen and X. Zhu, The group inverse and core inverse of sum of two elements in a ring, Communications in Algebra, 2019. DOI: 10.1080/00927872.2019.1654497 https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00927872.2019.1654497?journalCode=lagb20

91. X. Chen and J. Chen, Right core inverses of a product and a companion matrix, Linear and Multilinear Algebra 2019. (M21)

92. S. Xu, J. Chen and D. Mosić, On Characterizations of Special Elements in Rings with Involution, Chinese Annals of Mathematics. Series B, 2019.

93. L. Wang, D. Mosić and Y. Gao, Right core inverse and the related generalized inverses, Communications in Algebra, 2019.

94. H. Zhu and Q.-W. Wang, Weighted pseudo core inverses in rings, Linear and Multilinear Algebra 2019

95. M. P. Drazin, Weighted $(b, c)-$inverses in categories and semigroups, Communications in Algebra, 2019.

96. Y. Ke, L. Wang and J. Chen, The Core Inverse of a Product and 2×2 Matrices, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2019.

97. W. Wang, S. Xu and J. Benítez, Rank equalities related to the generalized inverses $A||(B1, C1)$, $D||(B2, C2)$ of two matrices A and D, Symmetry, 2019.

98. Y. Gao and J. Chen, The pseudo core inverse of a lower triangular matrix, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas, 2019 (M21)

99. T. Li and J. Chen, The core and dual core inverse of a morphism with factorization, Journal of Algebra and its Applications, 2019

100. H. Zhu and P. Patrício, Characterizations for pseudo core inverses in a ring with involution, Linear and Multilinear Algebra 2019 (M21)

101. S. Xu, J. Chen, J. Benítez and D. Wang, Centralizer's applications to the $(b, c)-$inverses in rings, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas, 2019. (M21)

102. G. Dolinar, B. Kuzma, J. Marovt and B. Ungor, Properties of core-EP order in rings with involution, Frontiers of Mathematics in China, 2019.

103. H. Zhu and P. Patrício, Several types of one-sided partial orders in rings, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas 2019 (M21)

104. T. Li, J. Chen and D. Mosić, The core inverses of differences and products of projections in rings with involution, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas 2019 (M21)

105. T. Li, J. Chen, M. Zhou and D. Wang, The core and dual core inverse of a morphism with kernel, Linear and Multilinear Algebra 2019 (M21)

106. T. Li, J. Chen, D. Wang and S. Xu, Core and dual core inverses of a sum of morphisms, Filomat 33:10 (2019), 2931–2941 https://doi.org/10.2298/FIL1910931L

107. L. Wang, J. Wei and R. Zhao, The characterizations of one-sided generalized inverses, Communications in algebra 2019.

108. I. Kyrchei, Determinantal Representations of the Quaternion Core Inverse and Its Generalizations, Advances in Applied Clifford Algebras (2019)

109. S. Xu, J. Chen and J. Benítez, EP Elements in Rings with Involution, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society (2019)

110. S. Xu, Core invertibility of triangular matrices over a ring, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics (2019)

111. J. K. Sahoo, R. Behera, P. S. Stanimirović, V. N. Katsikis and H. Ma, Core and core-EP inverses of tensors, Computational and Applied Mathematics (2020)

3.10.8 Rad [6] citiran je bar 21 put:

112. C. Deng and A. Yu, Relationships between DMP relation and some partial orders, Applied Mathematics and Computation 266 (2015), 41-53 (M21)

113. D. S. Cvetković-Ilić, D. Mosić and Y. Wei, Partial orders on $B(H)$, Linear Algebra and its Applications 481 (2015), 115-130 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379515002761)

114. G. Luo, K. Zuo and L. Zhou, Revisitation of the core inverse, Wuhan University Journal of Natural Sciences 20 (5) (2015), 381-385 (https://link.springer.com/article/10.1007/s11859-015-1109-6)

115. S. Xu, J. Chen and X. Zhang, New characterizations for core inverses in rings with involution, Frontiers of Mathematics in China 12(1) (2017), pp. 231-246

116. H. Wang and X. Liu, Partial orders based on core-nilpotent decomposition, Linear Algebra and its Applications 488 (2016), 235-248

117. M. S. Djikić, G. Fongi and A. Maestripieri, The minus order and range aditivity, Linear Algebra and its Applications 531 (2017), 234-256

118. Y. Ke, L. Wang and J. Chen, The core inverse of a product and 2×2 matrices, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 42(1) (2019), pp. 51-66 (https://link.springer.com/article/10.1007/s40840-017-0464-1)

119. H. Ma, Optimal perturbation bounds for the core inverse, Applied Mathematics and Computation 336 (2018), 176-181 (https://ezproxy.nb.rs:2055/science/article/pii/S0096300318303850)

120. H. Wang and X. Liu, Partial orders based on core-nilpotent decomposition, Linear Algebra and its Applications 488 (2016), 235-248 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437951500573X)

121. M. S. Djikić, Lattice properties of the core-partial order, Banach Journal of Mathematical Analysis 11 (2) (2017), 398-415 (https://projecteuclid.org/euclid.bjma/1488877212#references)

122. H. Jin and J. Benitez, The absorption laws for the generalized inverses in rings, Electronic Journal of Linear Algebra 30 (2015), 827-842 (https://doi.org/10.13001/1081-3810.3092)

123. F. Du and M. Z. Nashed, Additive perturbations and multiplicative perturbations for the core inverse of bounded linear operator in Hilbert space, Filomat (2018) 32(17), pp. 6131-6144

124. J. Benítez, E. Boasso and S. Xu, On the continuity and differentiability of the (dual) core inverse in C^*-algebras, Linear and Multilinear Algebra (2018) (M22)

125. D. Mosić, Core–EP pre-order of Hilbert space operators, Questiones Mathematicae (2018) 41(5), pp. 585-600

126. M. Zhou, J. Chen, P. S. Stanimirović, V. N. Katsikis and H. Ma, Complex varying-parameter Zhang neural networks for computing core and core-EP inverse, Neural Processing Letters (2019)

127. X. Deng, C. Lin and C. Deng, Remark on the core-EP pre-order of Hilbert space operators, Linear and Multilinear Algebra (2019) (M22)

128. D. Mosić, Weighted core–EP inverse of an operator between Hilbert spaces, Linear and Multilinear Algebra (2019) 67(2), pp. 278-298 (M22)

129. Q. Huang, S. Chen, Z. Guo and L. Zhu, Regular factorizations and perturbation analysis for the core inverse of linear operators in Hilbert spaces, International Journal of Computer Mathematics (2019) 96(10), pp. 1943-1956

130. H. Ma and P. S. Stanimirović, Characterizations, approximation and perturbations of the core-EP inverse, Applied Mathematics and Computation (2019) 359, pp. 404-417 (M21a)

131. D. E. Ferreyra, F. E. Levis and N. Thome, Characterizations of $k-$commutative equalities for some outer generalized inverses, Linear and Multilinear Algebra (2020) 68(1), pp. 177-192 (M21)

132. J. K. Sahoo, R. Behera, P. S. Stanimirović, V. N, Katsikis and H. Ma, Core and core-EP inverses of tensors, Computational and Applied Mathematics (2020) 39(1), 9

3.10.9 Rad [7] citiran je bar 5 puta:

133. J. Nikolov Radenković - Reverse order law for generalized inverses of multiple operator product, Linear and Multilinear Algebra 64 (7) (2016), 1266-1282 (M21) (https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081087.2015.1082961)

134. Q. Xu, C. Song and G. Wang - Multiplicative perturbations of matrices and the generalized triple reverse order law for the Moore–Penrose inverse, Linear Algebra Appl. 530 (2017), 366-383 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379517303142?via%3Dihub)

135. Z. Xiong and Y. Qin, Triple reverse order law for Moore-Penrose inverse of operator product, Journal of Computational Analysis and Applications 23(8) (2017), pp. 1347-1358

136. J. Milošević, Hartwig's triple reverse order law in C^*-algebras, Filomat 32(12) (2018), pp. 4229-4232

137. H. Zou, J. Chen and P. Patricio, Reverse order law for the core inverse in rings, Mediterranean Journal of Mathematics, 15(3), 145, 2018 (https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-018-1189-6)

3.10.10 Rad [14] citiran je bar jednom:

138. D. E. Ferreyra, M. Lattanzi, F. E. Levis and N. Thome, Parametrized solutions X of the system $AXA = AEA$ and $A^kEAX = XAEA^k$ for a matrix A having index k, Electronic Journal of Linear Algebra 35 (2019), 503-510 (https://repository.uwyo.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4051&context=cla)

4 Mišljenje o naučnim i stručnim radovima

Predmet izučavanja u radovima kandidata dr Nebojše Dinčića su:

1. razni oblici zakona obrnutog redosleda ("reverse order laws") za Mur-Penrouzov inverz ograničenih linearnih operatora na Hilbertovim prostorima i u prstenima sa involucijom,

2. "core" inverz ograničenih linearnih operatora na Hilbertovim prostorima i u prstenima sa involucijom, zajedno sa odgovarajućim parcijalnim uređenjima,

3. tzv. "extended" Mur–Penrouzov inverz ograničenih linearnih operatora na Hilbertovim prostorima,

4. tzv. singularna Silvesterova jednačina za kompleksne matrice i ograničene ili zatvorene linarne operatore,

5. funkcionalni račun.

Radovi [1-7] i [9-11] bili su predmet detaljne analize prilikom prethodnog izbora tj. izbora u zvanje vanredni profesor. U nastavku dajemo kraći prikaz radova objavljenih posle izbora u zvanje vanredni profesor, sa navođenjem pojedinih važnijih rezultata.

4.1 Prikaz rada [8]

Svoje interesovanje za Mur-Penrouzov inverz proizvoda operatora i funkcionalni račun autor je spojio na zanimljiv način u radu [8]. Taj rad predstavlja značajno uopštenje [11], budući da se koriste ternarni stepeni (koji su pogodni za slučaj operatora između različitih prostora) i Borelov funkcionalni račun za ograničene ermitske operatore. Ternarne stepenei autor je definisao na sledeći način:

Definicija 1. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Tada se **$k-$ti ternarni stepen** od A definiše kao:

$$A^{(k)} = (AA^*)^k A = A(A^*A)^k. \tag{1}$$

Definicija 2. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operator sa zatvorenom slikom i $k \in \mathbb{N}$. Tada se **$k-$ti negativni ternarni stepen** od A definiše kao:

$$A^{(-k)} := ((AA^*)^\dagger)^k A = A((A^*A)^\dagger)^k. \tag{2}$$

Nakon predstavljanja niza osobina ternarnog stepena operatora i kratke priče o funkcionalnom računu za ternarne operatore, autor prelazi na uopštavanje zakona obrnutog redosleda mešovitog tipa za Mur-Penrouzov inverz ograničenih linearnih operatora. Pomenućemo nekoliko najvažnijih rezultata. Ovde $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ označavaju proizvoljne Hilbertove prostore, $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{k+1}, \mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2, 3$, ograničene linearne operatore, i $M = A_1 A_2 A_3$.

Teorema 3. Neka operatori A_1, A_3, M i $(A_1^{(k)})^\dagger M (A_3^{(\ell)})^\dagger$, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, imaju zatvorene slike. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
(a) $M^\dagger = (A_3^{(\ell)})^\dagger \left((A_1^{(k)})^\dagger M (A_3^{(\ell)})^\dagger\right)^\dagger (A_1^{(k)})^\dagger$;
(b) $\mathcal{R}\left(A_1^{(k)}(A_1^{(k)})^* M\right) = \mathcal{R}(M)$ i $\mathcal{R}\left((A_3^{(\ell)})^* A_3^{(\ell)} M^*\right) = \mathcal{R}(M^*)$.

Teorema 4. Neka operatori M i $(A_1^{(k)})^* M (A_3^{(\ell)})^*$, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, imaju zatvorene slike. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
(a) $M^\dagger = (A_3^{(\ell)})^* \left((A_1^{(k)})^* M (A_3^{(\ell)})^*\right)^\dagger (A_1^{(k)})^*$;
(b) $\mathcal{R}(A_1^{(k)}(A_1^{(k)})^* M) = \mathcal{R}(M)$ i $\mathcal{R}((A_3^{(\ell)})^* A_3^{(\ell)} M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Teorema 5. Neka su f i g dve ograničene Borelove funkcije na realnoj pravoj koje uzimaju kompleksne vrednosti, tako da

$$(\forall \lambda \in \sigma(A_{11} A_{11}^*))\ f(\lambda) \neq 0, \quad (\forall \lambda \in \sigma(A_{31}^* A_{31}))\ g(\lambda) \neq 0, \tag{3}$$

gde $A_{11} = A_1|_{\overline{\mathcal{R}(A_1^*)}} : \overline{\mathcal{R}(A_1^*)} \to \mathcal{R}(A_1)$, $A_{31} = A_3|_{\overline{\mathcal{R}(A_3^*)}} : \overline{\mathcal{R}(A_3^*)} \to \mathcal{R}(A_3)$. Neka operatori A_1, A_3, M i $f(A_1 A_1^*) M g(A_3^* A_3)$ imaju zatvorene slike. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
(a) $M^\dagger = g(A_3^* A_3)\,(f(A_1 A_1^*) M g(A_3^* A_3))^\dagger\, f(A_1 A_1^*)$;
(b) $\mathcal{R}\,(f(A_1 A_1^*)^* f(A_1 A_1^*) M) = \mathcal{R}(M)$ i $\mathcal{R}\,(g(A_3^* A_3) g(A_3^* A_3)^* M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Teorema 6. Neka su f i g dve ograničene Borelove funkcije na realnoj pravoj koje uzimaju kompleksne vrednosti, tako da

$$(\forall \lambda \in \sigma((A_{11} A_{11}^*)^{-1}))\ f(\lambda) \neq 0, \quad (\forall \lambda \in \sigma((A_{31}^* A_{31})^{-1}))\ g(\lambda) \neq 0, \tag{4}$$

gde $A_{11} = A_1|_{\mathcal{R}(A_1^*)} : \mathcal{R}(A_1^*) \to \mathcal{R}(A_1)$, $A_{31} = A_3|_{\mathcal{R}(A_3^*)} : \mathcal{R}(A_3^*) \to \mathcal{R}(A_3)$. Neka operatori A_1, A_3, M i $f\left((A_1 A_1^*)^\dagger\right) M g\left((A_3^* A_3)^\dagger\right)$ imaju zatvorene slike. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:
(a) $M^\dagger = g((A_3^* A_3)^\dagger)\,\left(f((A_1 A_1^*)^\dagger) M g((A_3^* A_3)^\dagger)\right)^\dagger f((A_1 A_1^*)^\dagger)$;
(b) $\mathcal{R}\,(f(A_1 A_1^*)^* f(A_1 A_1^*) M) = \mathcal{R}(M)$ i $\mathcal{R}\,(g(A_3^* A_3) g(A_3^* A_3)^* M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Kao specijalni slučajevi prethodne četiri teoreme dobijaju se razni poznati rezultati iz rada [11].

4.2 Prikaz rada [12]

Rad [12] se bavi pitanjem da li je na Hilbertovim prostorima moguće definisati inverz koji zadovoljava malo promenjene Penrouzove jednačine, i ako jeste kakve su njegove relacije sa Mur-Penrouzovim inverzom. Najpre se kreće od skupa jednačina

$$(I_m)\ (AX)^m A = A,\ (II_n)\ X(AX)^n = X,\ AX = (AX)^*,\ XA = (XA)^*,$$

gde je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dati operator sa zatvorenom slikom, a $m, n \in \mathbb{N}_0$. Primenom postupka sličnog Euklidovom algoritmu zaključuje se da se gornji skup jednačina svodi na slučaj kad su m i n jednaki. Koristeći matrice operatora i spektralnu teoremu, za neparno n gornji sistem jednačina daje Mur-Penrouzov inverz $X = A^\dagger$, dok se slučaj parnog n zapravo svodi na $n = 2$. Iz konstrukcije se vidi da takav operator X mora zavisiti od određenog potprostora od $\mathcal{R}(A)$, odnosno, ekvivalentno, od $\mathcal{N}(A)$.

Definicija 7. Neka su $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ proizvoljni Hilbertovi prostori i neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operator sa zatvorenom slikom. Za fiksirani potprostor $S \subset \mathcal{R}(A)$ (ili, ekvivalentno, $T \subset \mathcal{R}(A^*)$), gde su S i T povezani na sledeći način:

$$AP_T = P_S A, \text{ ili, ekvivalentno, } A^\dagger P_S = P_T A^\dagger.$$

postoji jedinstveni operator označen sa $A^\ddagger \equiv A^\ddagger_{T,S}$ takav da su zadovoljene sledeće četiri jednačine slične Penrouzovim jednačinama:

$$(AA^\ddagger)^2 A = A,\ A^\ddagger (AA^\ddagger)^2 = A^\ddagger,\ (AA^\ddagger)^* = AA^\ddagger,\ (A^\ddagger A)^* = A^\ddagger A.$$

Takav inverz zvaćemo prošireni Mur-Penrouzov inverz ("extended Moore-Penrose inverse"), i on može biti eksplicitno dat sa

$$A^\ddagger_{T,S} = A^\dagger (I - 2P_S) = (I - 2P_T) A^\dagger.$$

Ovakav inverz se, očekivano, ponaša vrlo slično Mur–Penrouzovom inverzu, te npr. važi

$$(A^\ddagger_{T,S})^* = (A^*)^\ddagger_{S,T},\ (A^\ddagger_{T,S})^\ddagger_{S,T} = A,$$

dok njegove specifičnosti potiču od zavisnosti od određenih potprostora. Od interesantnih rezultata izdvajamo:

Teorema 8. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operator sa zatvorenom slikom, i neka su $S_k,\ k = \overline{1, n},\ n \geq 2$, zatvoreni potprostori od $\mathcal{R}(A)$, tako da je $\mathcal{R}(A)$ njihova ortogonalna direktna suma (tj. $\mathcal{R}(A) = S_1 \oplus^\perp S_2 \oplus^\perp \ldots \oplus^\perp S_n$). Tada:

$$\sum_{k=1}^{n} A^\ddagger_{T_k, S_k} = (n-2) A^\dagger.$$

Ovde su T_k, $k = \overline{1,n}$, i S_k, $k = \overline{1,n}$, povezani relacijom $AP_{T_k} = P_{S_k}A$, odnosno, ekvivalentno, $A^\dagger P_{S_k} = P_{T_k}A^\dagger$, $k = \overline{1,n}$.

Naredna teorema, između ostalog, uspostavlja vezu između "proširenog" Mur–Penrouzovog i običnog Mur–Penrouzovog inverza,

Teorema 9. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ operator sa zatvorenom slikom, i neka su $S \subset \mathcal{R}(A)$ i $T \subset \mathcal{R}(A^*)$ zatvoreni netrivijalni potprostori. Tada važi:

1. $A^\dagger = A^\ddagger_{T,S}(I - 2P_S)$;
2. $A^\ddagger_S A A^\ddagger_S = A^\dagger$;
3. $A^\ddagger_{T,S}$ je EP ako i samo ako je A EP.

4.3 Prikaz rada [14]

U literaturi uglavnom je izučavana Silvesterova matrična (ili operatorska) jednačina $AX - XB = C$ kada su spektri od A i B disjunktni, tj. kada jednačina ima jedinstveno rešenje. U radu [14] razmatra se rešavanje Silvesterove matrične jednačine u slučaju kada $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \varnothing$. Tada je potrebno najpre videti uslove pod kojima jednačina uopšte ima rešenje, a potom i odrediti ta rešenja (beskonačno mnogo njih). Autor koristi razlaganje kvadratnih kompleksnih matrica u Žordanovu normalnu formu, čime polazni problem svodi na ispitivanje rešivosti i rešavanje sistema jednostavnih Silvesterovih jednačina oblika

$$J_p(\lambda)Y - YJ_q(\mu) = D,$$

gde su $J_p(\lambda)$ i $J_q(\mu)$ Žordanove matrice odgovarajućih dimenzija. U slučaju saglasnosti, od ovakvih jednostavnih rešenja konstruiše se rešenje polazne jednačine. Kako je rad sa Žordanovom formom često numerički nestabilan, prikazan je i algoritam za rešavanje preko Šurove dekompozicije.

Naredne dve teoreme prikazuju uslove saglasnosti i rešenje kada su jednostavne Silvesterove jednačine saglasne.

Teorema 10. Silvesterova jednačina

$$J_m(0)X - XJ_n(0) = C, \tag{5}$$

gde $m \geq n$, je saglasna ako i samo ako

$$\sum_{k=0}^{n-1} J_m(0)^{m-1-k} C J_n(0)^k = 0, \tag{6}$$

ili, ekvivalentno,

$$\sum_{k=0}^{p-1} c_{m-k,p-k} = 0,\ p = \overline{1,n}, \tag{7}$$

i njeno opšte rešenje (koje zavisi od n kompleksnih parametara) je dato sa

$$X = \left[\begin{array}{c} p_{n-1}(J_n(0)) \\ \hline 0_{(m-n)\times n} \end{array}\right] + J_m(0)^T \sum_{k=0}^{n-1} \left(J_m(0)^T\right)^k C J_n(0)^k, \tag{8}$$

gde je p_{n-1} proizvoljan polinom stepena najviše $n-1$.

Teorema 11. Silvesterova jednačina

$$J_m(0)X - XJ_n(0) = C, \tag{9}$$

gde $m \leq n$, je saglasna ako i samo ako

$$\sum_{k=0}^{m-1} J_m(0)^k C J_n(0)^{n-1-k} = 0, \tag{10}$$

i njeno opšte rešenje je

$$X = \left[\begin{array}{cc} 0_{m\times(n-m)} & q_{m-1}(J_m(0)) \end{array}\right] - \sum_{k=0}^{m-1} J_m(0)^k C \left(J_n(0)^T\right)^k J_n(0)^T, \tag{11}$$

gde je q_{m-1} proizvoljan polinom stepena najviše $m-1$.

U nastavku se pokazuje kako se od ovih jednostavnih rešenja formira u slučaju saglasnosti rešenje polazne jednačine.

Bez umanjenja opštosti, posmatra se jednačina $AX - XB = C$ kada $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$, $C = [C_{ij}]_{s\times s}$ i pretpostavlja se da su odgovarajuće matrice već u svojim Žordanovim formama:

$$A = diag\{J(\lambda_1; p_{11}, p_{12}, ..., p_{1,k_1}), ..., J(\lambda_s; p_{s1}, p_{s2}, ..., p_{s,k_s})\},$$
$$B = diag\{J(\lambda_1; q_{11}, q_{12}, ..., q_{1,\ell_1}), ..., J(\lambda_s; q_{s1}, q_{s2}, ..., q_{s,\ell_s})\},$$

gde $p_{i1} \geq ... \geq p_{i,k_i} > 0,\ q_{j1} \geq ... \geq q_{j,\ell_j} > 0,\ i,j = \overline{1,s}$.

Nije tešto videti da su jednačine od kojih zavisi rešivost upravo oblika

$$J(\lambda_i; p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{i,k_i})X_{ii} - X_{ii}J(\lambda_i; q_{i1}, q_{i2}, ..., q_{i,\ell_i}) = C_{ii},\ i = \overline{1,s},$$

i one se nakon translacije za $-\lambda_i$, svode na oblik

$$J(0; p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{i,k_i})X_{ii} - X_{ii}J(0; q_{i1}, q_{i2}, ..., q_{i,\ell_i}) = C_{ii},\ i = \overline{1,s},$$

na koji se može primeniti odgovarajuća teorema.

U narednoj teoremi koristi se oznaka $C_{ij} = [C_{uv}^{(ij)}]_{u=\overline{1,k_i}, v=\overline{1,\ell_j}} \in \mathbb{C}^{p_i\times q_j}$.

Teorema 12. Neka

$$A = diag\{J(\lambda_1; p_{11}, p_{12}, ..., p_{1,k_1}), ..., J(\lambda_s; p_{s1}, p_{s2}, ..., p_{s,k_s})\},$$
$$B = diag\{J(\lambda_1; q_{11}, q_{12}, ..., q_{1,\ell_1}), ..., J(\lambda_s; q_{s1}, q_{s2}, ..., q_{s,\ell_s})\},$$

gde $p_{i1} \geq ... \geq p_{i,k_i} > 0$, i $q_{j1} \geq ... \geq q_{j,\ell_j} > 0$, $i, j = \overline{1,s}$. Označimo: $d_i = \min\{p_{i1}, q_{i1}\}$, $C_{M_i}^{(ii)} = \Pi_{M_i}(C^{(ii)})$, $C_{N_i}^{(ii)} = \Pi_{N_i}(C^{(ii)})$, gde

$$M_i = \{(u,v) : p_{iu} \geq q_{iv}\},\ N_i = \{(u,v) : p_{iu} < q_{iv}\} \subset \mathbb{N}_{k_i} \times \mathbb{N}_{\ell_i},\ i = \overline{1,s}.$$

Silvesterova jednačina $AX - XB = C$ je saglasna ako i samo ako

$$\sum_{k=0}^{d_i-1} \begin{bmatrix} A_i(0)^{\langle k \rangle} & 0 \\ 0 & A_i(0)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{M_i}^{(ii)} & 0 \\ 0 & C_{N_i}^{(ii)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i(0)^k & 0 \\ 0 & B_i(0)^{\langle k \rangle} \end{bmatrix} = 0,\ i = \overline{1,s},$$

gde smo koristili zapis

$$A_i(0) = diag[J_{p_{i1}}(0), ..., J_{p_{i,k_i}}(0)],\ B_i(0) = diag[J_{q_{i1}}(0), ..., J_{q_{i,\ell_i}}(0)],\ i = \overline{1,s}.$$

U tom slučaju, partikularno rešenje $X_p = [X_p^{(ij)}]_{s \times s}$ dato je sa:

$$X_p^{(ii)} = \sum_{k=0}^{d_i-1} (A_i(0)^T)^{k+1} C_{M_i}^{(ii)} B_i(0)^k - \sum_{k=0}^{d_i-1} A_i(0)^k C_{N_i}^{(ii)} (B_i(0)^T)^{k+1},\ i = \overline{1,s},$$

$$X_p^{(ij)} = \sum_{k=0}^{q_{j1}-1} A_i(\lambda_i - \lambda_j)^{-(k+1)} C^{(ij)} B_j(0)^k =$$
$$= -\sum_{k=0}^{p_{i1}-1} A_i(0)^k C^{(ij)} B_j(\lambda_j - \lambda_i)^{-(k+1)} \in \mathbb{C}^{k_i \times \ell_j},\ i \neq j;$$

homogeno rešenje $X_h = diag[X_h^{(ii)}]$, $i = \overline{1,s}$, dato je sa

$$\left[X_h^{(ii)}\right]_{uv} = \begin{cases} \begin{bmatrix} p_{q_{iv}-1}(J_{q_{iv}}(0)) \\ 0_{(p_{iu}-q_{iv}) \times q_{iv}} \end{bmatrix}, & (u,v) \in M_i, \\ \begin{bmatrix} 0_{p_{iu} \times (q_{iv}-p_{iu})} & p_{p_{iu}-1}(J_{p_{iu}}(0)) \end{bmatrix}, & (u,v) \in N_i. \end{cases}$$

Za numeričku primenu mnogo pogodniji je pristup preko Šurove forme.

Poznato je da se svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ može predstaviti u Šurovoj formi kao $A = QUQ^{-1}$, gde je Q unitarna, a U gornje trougaona matrica. Kako je U slična matrici A, one imaju isti multiskup sopstvenih vrednosti, a pošto je trougaona, te sopstvene vrednosti nalaze se na dijagonali od U.

Ukoliko je matrica A realna i $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ tada se U može odabrati da bude realna i ortogonalna.

Koristeći ideju konstructivnog dokaza Šurove dekompozicije, neka $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ i neka postoje matrice S i T tako da (a i b su višestrukosti od λ u $\sigma(A)$ i $\sigma(B)$, redom; U_λ i V_λ su odgovarajući sopstveni potprostori):

$$S^*AS = \begin{bmatrix} \lambda I_a & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} : U_\lambda \oplus U_\lambda^\perp \to U_\lambda \oplus U_\lambda^\perp,$$

$$T^*BT = \begin{bmatrix} \lambda I_b & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} : V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp \to V_\lambda \ominus V_\lambda^\perp.$$

Primetimo da $\lambda \notin \sigma(A_{22}) \cup \sigma(B_{22})$. Sada Silvesterova jednačina postaje:

$$S \begin{bmatrix} \lambda I_a & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} S^*X - XT \begin{bmatrix} \lambda I_b & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} T^* = C$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda I_a & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} S^*XT - S^*XT \begin{bmatrix} \lambda I_b & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = S^*CT,$$

tako da ako stavimo $S^*XT = Y = [Y_{ij}]$ i $S^*CT = D = [D_{ij}]$, dobija se

$$\begin{bmatrix} \lambda I_a & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_b & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

što je ekvivalentno sledećem sistemu:

$$A_{12}Y_{21} = D_{11}, \tag{12}$$

$$Y_{12}(\lambda I - B_{22}) - Y_{11}B_{12} = D_{12} - A_{12}Y_{22}, \tag{13}$$

$$(A_{22} - \lambda I)Y_{21} = D_{21}, \tag{14}$$

$$A_{22}Y_{22} - Y_{22}B_{22} = D_{22} + Y_{21}B_{12}. \tag{15}$$

Iz (12) i (14) dobijamo **uslov saglasnosti**:

$$A_{12}(A_{22} - \lambda I)^{-1}D_{21} = D_{11}.$$

Takođe iz (14) sledi

$$Y_{21} = (A_{22} - \lambda I)^{-1}D_{21}.$$

Primetimo da su A_{22} i B_{22} (te zato i $A_{22} - \lambda I$ i $\lambda I - B_{22}$) gornje trougaone matrice, tako da se na njih može primeniti neki od poznatih numeričkih metoda za izračunavanje inverza.

Slučaj 1: Ako $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \{\lambda\}$, tj. ako je λ jedina zajednička sopstvena vrednost (te stoga i $\sigma(A_{22}) \cap \sigma(B_{22}) = \emptyset$), zbog (15) dobija se jedinstveno Y_{22} (koje se može izračunati koristeći neki od poznatih numeričkih metoda za rešavanje Silvesterove jednačine), dok iz (13) sledi da se može izraziti Y_{12} preko Y_{11}:

$$Y_{12} = (D_{12} - A_{12}Y_{22} + Y_{11}B_{12})(\lambda I - B_{22})^{-1}.$$

Dakle, našli smo familiju rešenja.

Slučaj 2: Ako postoji još neka zajednička sopstvena vrednost μ za A i B (što znači da $\mu \in \sigma(A_{22}) \cap \sigma(B_{22})$), upravo opisani metod primenjuje se na jednačinu (15), tj.

$$A_{22}Y_{22} - Y_{22}B_{22} = D_{22} + (A_{22} - \lambda I)^{-1}D_{21}B_{12}.$$

Ostaje još da se uradi zamena unazad, čime je jednačina u potpunosti rešena.

4.4 Prikaz rada [13]

U radu [13] posmatra se Silvesterova jednačina kada su A i B zatvoreni linearni operatori čiji tačkasti spektri imaju neprazan presek. Razmatraju se slučajevi homogene i nehomogene Silvesterove jednačine i konstruišu se tzv. slaba rešenja (uvedena u pomenutom radu). Prikazana i je i primena na Šturm-Liuvilov operator.

Definicija 13. Linearni operator X je slabo rešenje jednačine $AX - XB = C$ ako

1. $\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(B) \neq \emptyset$
2. $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C)$, $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{D}(A)$ i $\mathcal{D}(X)$ je $B-$invarijantan potprostor od V_1.
3. za svako $u \in \mathcal{D}(X)$ važi $AX(u) - XB(u) = C(u)$.

Definicija 14. Linearni operator X je slabo rešenje jednačine $AX - XB = 0$ ako

1. $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{D}(A)$ i $\mathcal{D}(X)$ je $B-$invarijantan potprostor od V_1.
2. za svako $u \in \mathcal{D}(X)$ važi $AX(u) = XB(u)$.

Ako su A, B, C i X ograničeni linearni operatori, tada $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(X) = V_1$ i $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{D}(A) = V_2$ i V_1 je $B-$invarijantan potprostor od V_1. Drugim rečima, ovako definisano slabo rešenja su ekstenzije definicija rešenja u slučaju ograničenih operatora.

Teorema 15. [**Translirana injektivna homogena jednačina**] Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori i neka su $B \in L(\mathcal{D}(B), V_1)$, $A \in L(\mathcal{D}(A), V_2)$ injektivni linearni operatori, gde $\mathcal{D}(B) \subset V_1$ i $\mathcal{D}(A) \subset V_2$, i neka je $W \subset \mathcal{D}(B)$ $B-$invarijantan potprostor od V_1 a $Z \subset \mathcal{D}(A)$ $A-$invarijantan potprostor od V_2. Neka su T_W i S_Z kao u konstrukciji pre teoreme. Tada postoji linearan operator $X \in L(W, Z)$ koji je slabo rešenje jednačine

$$XT_W B = S_Z AX, \tag{16}$$

definisan na W.

U slučaju zatvorenih operatora na Banahovim, odnosno Hilbertovim, prostorima, važe sledeći rezultati.

Teorema 16. [**Homogena jednačina**] Neka su V_1 i V_2 dati Banahovi prostori, $B \in L(V_1)$ i $A \in L(V_2)$ zatvoreni operatori, tako da $\mathcal{N}(B)$ i $\mathcal{N}(A)$ imaju topološke komplemente u V_1 i V_2, redom. Ako $(\sigma_p(B) \cap \sigma_p(A)) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ tada homogena jednačina

$$AX - XB = 0 \tag{17}$$

ima netrivijalno slabo rešenje.

Posledica 17. Neka su $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ Hilbertovi prostori, $A \in L(\mathcal{H}_2)$ i $B \in L(\mathcal{H}_1)$ zatvoreni operatori. Ako $(\sigma_p(A) \cap \sigma_p(B)) \neq \emptyset$ tada homogena jednačina (17) ima netrivijalno slabo rešenje.

Pokazano ja da za nehomogenu Silvesterovu jednačinu važi sledeće

Ukoliko su V_1 i V_2 Banahovi prostori, $B \in L(V_1)$, $A \in L(V_2)$ zatvoreni operatori takvi da $\mathcal{N}(B)$ i $\mathcal{N}(A)$ imaju topološke komplemente (označevamo ih redom sa V_1' i V_2') u V_1 i V_2, respektivno. Projektor sa V_2 na V_2' označavaćemo sa $P_{V_2'}$ (on postoji, pošto $\mathcal{N}(A)$ ima topološki komplement).
Neka $C \in L(V_1, V_2)$ tako da $\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(B) \neq \emptyset$ i $C(\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(B)) \subset \mathcal{R}(A)$. Pretpostavimo da $(\sigma_p(B) \cap \sigma_p(A)) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ i označimo taj presek sa

$$\sigma \equiv (\sigma_p(B) \cap \sigma_p(A)) \setminus \{0\}.$$

Teorema 18. [**Nehomogena jednačina**] Koristeći prethodno uvedenu notaciju, ako σ sadrži dve disjunktne familije različitih nenula elemenata

$$\{\mu_j\}_{j \in J} \cup \{\lambda_i\}_{i \in I} \subset \sigma, \tag{18}$$

gde $\{\mu_j\}_{j \in J}$ i $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ imaju sledeće osobine:

1. Za svako $j \in J$ neka $u'_j \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C) \cap V'_1$ tako da $Bu'_j = \mu_j u'_j$ i $C(u'_j) = 0$.
2. Za svako $i \in I$, neka $u_i \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C) \cap V'_1$ tako da $Bu_i = \lambda_i u_i$ i $C(u_i) \neq 0$, $C(u_i) \in \mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ i $C(u_i)$ je linearno nezavisan sa vektorima iz $\{(A - \lambda_k I)^{-1} P_{V'_2} C(u_k)\}_{k \in I}$. Zahtevamo takođe i da su $\{C(u_i)\}_{i \in I}$ linearno nezavisni različiti vektori.

Tada postoji slabo rešenje nehomogene jednačine $AX - XB = C$, definisano na

$$(\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{D}(C)) \oplus (Lin(\{u'_j\}_{j \in J})) \oplus (Lin(\{u_i\}_{i \in I})).$$

Prikazani rezultati daju slaba rešenja definisana na konačnim linearnim kombinacijama sopstvenih vektora, dok se u nastavku rada koristi Šauderova baza za njihovo proširivanje.

4.5 Prikaz rada [15]

Nastavak razmatranja Silvesterove jednačine iz rada [14] nalazi se u radu [15]. Nakon razmatranja egzistencije rešenja, njihove klasifikacije (kada postoje), i aproksimativnog rešenja u opštem slučaju, prelazi se na nalaženje najboljeg srednjekvadratnog rešenja sa minimalnom Frobenijusovom normom u slučaju kvadratnih kompleksnih matrica. Pristup koji se pritom koristi je kao u [14], gde se parametri koji se javljaju u rešenjima biraju tako da daju traženo najbolje srednjekvadratno rešenje minimalno po normi.

Pretpostavlja se da A i B imaju tačno s zajedničkih sopstvenih vrednosti:

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} =: \sigma = \sigma(A) \cap \sigma(B).$$

Uvode se sledeće oznake: $E_B^k = \mathcal{N}(B - \lambda_k I)$ i $E_A^k = \mathcal{N}(A - \lambda_k I)$ kadgod $\lambda_k \in \sigma$. Kako različite sopstvene vrednosti generišu uzajamno ortogonalne sopstvene vektore, prostori E_B^k formiraju ortogonalnu sumu. Tada $E_B := \sum_{k=1}^{s} E_B^k$ je zatvoren potprostor od V_1 i postoji $E_B^\perp$ tako da $V_1 = E_B \oplus E_B^\perp$. Uzima se $B = B_E \oplus B_1$ u odnosu na tu dekompoziciju i uvodi oznaka $C_1 = CP_{E_B^\perp}$.

Teorema 19. *(Egzistencija rešenja)* Za svako $k \in \{1, \ldots, s\}$, neka su λ_k, E_A^k i E_B^k kao u razmatranju ispred teoreme. Ako

$$\mathcal{N}(C_1)^\perp = \mathcal{R}(B_1) \qquad \text{and} \qquad C\left(E_B^k\right) \subset \mathcal{R}(A - \lambda_k I), \tag{19}$$

tada postoji beskonačno mnogo rešenja X jednačine $AX - XB = C$.

Potom se razmatra pitanje da li mora svako rešenje Silvesterove jednačine $AX - XB = C$ biti oblika

$$X = \begin{bmatrix} X_E & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix},$$

gde su X_E i X_1 izvesni operatori koji se konstruišu u dokazu prethodne teoreme.

Kako je za primene posebno važna matrična Silvesterova jednačina, u nastavku rada autori se bave pitanjima najboljeg srednjekvadratnog rešenja koje je minimalne Frobenijusove norme.

Problem 1. Odrediti skup $\mathcal{S}$ svih $\widehat{X}$ tako da je $||A\widehat{X} - \widehat{X}B - C||_F$ najmanje moguće, tj.

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{m \times n}} ||AX - XB - C||_F = ||A\widehat{X} - \widehat{X}B - C||_F.$$

Problem 2. Među svim $\widehat{X}$ naći ona sa najmanjom Frobenijusovom normom, tj.

$$\min_{\widehat{X} \in \mathcal{S}} ||\widehat{X}||_F = ||\widehat{X}_0||_F.$$

Definition 4.1. Matrice $\widehat{X}$ koje su rešenja Problema 1 su **najbolja srednjekvadratna rešenja**. Matrice $\widehat{X_0}$ koje su rešenja Problema 2 su **najbolja srednjekvadratna rešenja sa minimalnom normom**.

Koristeći Žordanovu dekompoziciju, polazni problemi svodi se na jednostavnije:

Problem 1'. Odrediti skup $\mathcal{S}$ svih najboljih srednjekvadratnih rešenja $\widehat{X}$, tj.

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{m \times n}} ||J_m(0)X - XJ_n(0) - C||_F = ||J_m(0)\widehat{X} - \widehat{X}J_n(0) - C||_F.$$

Problem 2'. Među svim $\widehat{X} \in \mathcal{S}$ naći ona, $\widehat{X_0}$, sa najmanjom Frobenijusovom normom, tj.

$$\min_{\widehat{X} \in \mathcal{S}} ||\widehat{X}||_F = ||\widehat{X}_0||_F.$$

U nastavku se dokazuje da je takvo $\widehat{X}$ jedinstveno i daje se metod za njegovo eksplicitno nalaženje.

Teorema 20. Silvesterova jednačina $J_m(0)X - XJ_n(0) = C$ ima najbolje srednjekvadratno rešenje $\widehat{X}$ dato sa

$$\widehat{X} = X_h + X_p + X_c, \tag{20}$$

gde je X_h rešenje odgovarajuće homogene jednačine:

$$X_h = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} p_{n-1}(J_n(0)) \\ \hline 0_{(m-n)\times n} \end{array}\right], & m \geq n, \\ \left[\begin{array}{cc} 0_{m\times(n-m)} & q_{m-1}(J_m(0)) \end{array}\right], & m \leq n, \end{cases}$$

X_p je izraz dat sa

$$X_p = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(J_m(0)^T\right)^{k+1} C J_n(0)^k, & m \geq n, \\ -\sum\limits_{k=0}^{m-1} J_m(0)^k C \left(J_n(0)^T\right)^{k+1}, & m \leq n, \end{cases}$$

i

$$X_c = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} 0_{(m-n)\times n} \\ W \end{array}\right], & m \geq n, \\ \left[\begin{array}{cc} -W^T & 0_{m\times(n-m)} \end{array}\right], & m \leq n, \end{cases}$$

gde smo koristili oznaku

$$W = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_p/p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_3/3 & 2\sigma_4/4 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2/2 & 2\sigma_3/3 & \dots & (p-1)\sigma_p/p & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Veličina odstupanja je:

$$\Delta(\widehat{X}; C) = \min_X \Delta(X; C) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\sigma_k^2}{k},$$

gde je σ_k zbir elemenata po $(m+k)-$toj maloj dijagonali matrice C.

Autori su zaključili da, bila jednačina saglasna ili ne, postoji cela klasa najboljih srednjekvadratnih rešenja koja zavise od izvesnih parametara. Ukoliko se ti slobodni parametri odaberu na odgovarajući način, dobija se upravo najbolje srednjekvadratno rešenje koje ima minimalnu Frobenijusovu

normu. Nakon razmatranja strukture matrica X_h i X_c iz prethodne Teoreme, zaključili su da samo matrica X_p može imati uticaja na minimizaciju. Dakle,

$$\min_{\widehat{X}\in\mathcal{S}} ||\widehat{X}||_F^2 = \min_{X_h} ||X_h + X_p||_F^2 + ||X_c||_F^2,$$

gde je $||X_c||_F$ konstanta, jednaka nuli ako i samo ako je jednačina saglasna, i strogo pozitvna ako nije.

Teorema 21. Postoji jedinstveno najbolje srednjekvadratno rešenje sa minimalnom normom Silvesterove jednačine $J_m(0)X - XJ_n(0) = C$, dato sa

$$\widehat{X_0} = \widetilde{X_h} + X_p + X_c, \tag{21}$$

gde

$$\widetilde{X_h} = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} p_{n-1}^*(J_n(0)) \\ \hline 0_{(m-n)\times n} \end{array}\right], & m \geq n, \\ \left[\begin{array}{cc} 0_{m\times(n-m)} & q_{m-1}^*(J_m(0)) \end{array}\right], & m \leq n, \end{cases}$$

a p_{n-1}^* i q_{m-1}^* su jedninstveno određeni polinomi.

Posle detaljnog razmatranja jednostavnih slučajeva, autori se vraćaju na polazni problem.

$$\begin{aligned} \min_X ||AX - XB - C||_F^2 &\leq \alpha^2(S,T) \min_Y ||J_AY - YJ_B - D||_F^2 = \\ &= \alpha^2(S,T) \sum_{i=1}^{s}\sum_{u=1}^{k_i}\sum_{v=1}^{\ell_i} \min_{Y_{uv}^{(ii)}} ||J_u(0)Y_{uv}^{(ii)} - Y_{uv}^{(ii)}J_v(0) - D_{uv}^{(ii)}||_F^2 = \\ &= \alpha^2(S,T) \sum_{i=1}^{s}\sum_{u=1}^{k_i}\sum_{v=1}^{\ell_i}\sum_{k=1}^{\min\{u,v\}} \frac{\sigma_k^2(D_{uv}^{(ii)})}{k} \end{aligned}$$

Ako je desna strana nula, tj.

$$\sigma_k(D_{uv}^{(ii)}) = 0,\ k = \overline{1, \min\{u,v\}},\ i = \overline{1,s},$$

tada je jednačina saglasna. Ovaj rezultat je nezavisan od izbora matrica S i T (osim zahteva da odgovarajući Žordanovi blokovi budu na odgovarajućim mestima).

Ukoliko desna strana nije nula, bar se može odrediti gornja granica (koja ne mora biti najbolja moguća) greške.

5 Ostvareni rezultati u razvoju nastavno-naučnog podmlatka na Fakultetu

Kandidat dr Nebojša Dinčić je bio član brojnih komisije za odbranu diplomskih i master radova na Departmanu za matematiku Prirodno–matematičkog fakulteta u Nišu.

Bio je mentor 7 diplomskih radova (Ivan Pavlović 2016, Jelena Milikić 2016, Igor Vasiljević 2015, Tanja Ćirov 2014, Miloš Pavlović 2014, Vojin Došlo 2013, Svetlana Stojanović 2013.) i 6 master rada (Svetlana Stanković 2019, Aleksandra Vlajković 2018, Aleksandra Milovanović 2018, Marija Miletić 2018, Kristina Cvetkov 2017, Bogdan Đorđević 2017.). Za svoj master rad, student Bogdan Đorđević dobio je 2017. prvu nagradu, a studentkinja Aleksandra Vlajković 2019. pohvalu, na konkursu Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umetnosti.

Dr Nebojša Dinčić je i mentor jednom uspešnom studentu Doktorske škole matematike.

6 Doprinos akademskoj i široj zajednici

6.0.1 Učešće u radu tela fakulteta i univerziteta

Kandidat je član Saveta Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu od 2018. godine.

6.0.2 Članstvo u stručnim i naučnim asocijacijama

Kandidat je član Srpskog naučnog matematičkog društva.

6.0.3 Recenzentske aktivnosti

Kandidat dr Nebojša Dinčić je recenzirao više naučnih radova za sledeće časopise:

1. Applied Mathematics and Computation
2. Communications in Algebra
3. Electronic Journal of Linear Algebra
4. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics
5. Filomat

6. Functional Analysis, Approximation and Computation
7. Kragujevac Journal of Mathematics
8. Linear and Multilinear Algebra
9. Mediterranean Journal of Mathematics
10. Proceedings of the American Mathematical Society

6.0.4 Članstvo u uređivačkim odborima časopisa

Kandidat dr Nebojša Dinčić je član uređivačkog odbora časopisa *Functional Analysis, Approximation and Computation* koji izdaje Prirodno-matematički fakultet u Nišu.

Kandidat je od 18. aprila 2013. urednik za matematiku časopisa *Matematika i informatika*, koji izdaje Prirodno-matematički fakultet u Nišu, i koji se bavi popularizacijom matematike i informatike.

6.0.5 Rad na popularizaciji nauke

Pored rada na popularizaciji matematike u skolopu časopisa Matematika i informatike, kandidat dr Nebojša Dinčić je potpredsednik i jedan od osnivača Astronomskog društva "Vega" iz Surdulice, u okviru kojeg je (između ostalog) učestvovao u organizaciji manifestacije "Maj mesec matematike" 2013, 2014, 2015. i 2016. godine sa nekoliko popularnih predavanja.

6.0.6 Rad na popularizaciji Departmana

Kandidat dr Nebojša Dinčić je predsednik Komisije za promociju Departmana za matematiku. Zajedno sa saradnicima i studentima učestvovao je na manifestacijama održanim u Nišu: Nauk nije bauk 2017, 2018. i 2019, Noć istraživača 2017, 2018. i 2019, Matematika u maju 2018. Sa grupom saradnika organizovao je obeležavanje Maja meseca matematike 2017, 2018. i 2019. godine u prostorijama Fakulteta.

Zaključak i predlog

Kandidat dr Nebojša Dinčić u dosadašnjem radu na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu postigao je izuzetne rezultate u naučnom, nastavno-obrazovnom i stručnom radu. Do sada je objavio (sam ili u koautorstvu) 15 naučnih radova (i još tri nekategorisana), i to 8 u kategoriji M21 i 7 u kategoriji M22, čime je ostvario 99 poena objavljivanjem radova u časopisima kategorije M21, M22 i M23, pri čemu je 71 poen ostvario pre izbora u zvanje vanredni profesor, a 28 nakon izbora u pomenuto zvanje. Kandidat je takođe autor jednog univerzitetskog udžbenika (posle izbora u zvanje vanredni profesor) i jedne zbirke rešenih zadataka. Svoje rezultate izlagao je na osam međunarodnih skupova u zemlji i inostranstvu. Radovi kandidata su citirani bar 138 puta (izuzimajući autocitate i kocitate), od toga većina u časopisima kategorije M20.

Na osnovu prethodno izloženog, Komisija konstatuje da kandidat ispunjava sve uslove predviđene Zakonom o visokom obrazovanju i Bližim kriterijumima za izbor u zvanja nastavnika Univerziteta u Nišu. Stoga, Komisija sa zadovoljstvom predlaže da se vanredni profesor **dr Nebojša Dinčić** izabere u zvanje **redovnog profesora** za užu naučnu oblast **Matematika** na Departmanu za matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu.

Komisija:

1. **Prof. dr Dragan Đorđević**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu

2. **Akademik Stevan Pilipović**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

3. **Prof. dr Dijana Mosić**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu

U Nišu, 12.2.2020. godine